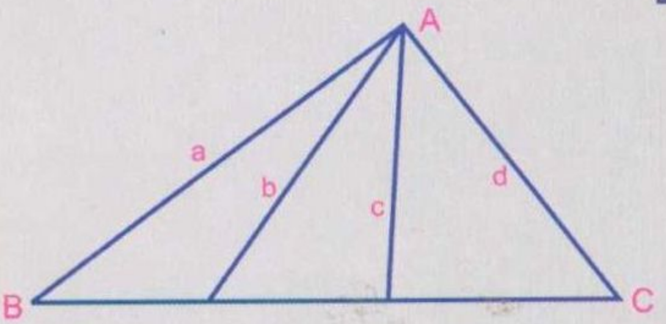
NGUYỄN VŨ THANH - TRẦN MINH CHIẾN

GIẢI BÀI TẬP ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11



NÂNG CAO

ĐHQG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN VŨ THANH - TRẦN MINH CHIẾN

Giải bài tập
ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11
NÂNG CAO

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Đơn vị liên kết :
Công ty sách hoa hồng

Lời nói đầu

Theo tinh thần đổi mới phương pháp dạy và học hiện nay, chúng tôi biên soạn quyển sách này theo cấu trúc như sau:

- ***Tóm tắt lí thuyết**: Giúp học sinh nắm vững và củng cố kiến thức cơ bản bài học.*
- ***Hệ thống bài tập**: Giúp học sinh vận dụng và rèn luyện kĩ năng tư duy toán học.*
- *Đặc biệt có phần **Bài tập làm thêm** giúp học sinh làm quen với cách vận dụng kiến thức toán đã học để giải quyết tốt các dạng bài tập thường gặp trong các kì kiểm tra, thi cử.*

Quý phụ huynh có thể tham khảo quyển sách này để giúp đỡ, kiểm tra việc ôn tập ở nhà của con em mình. Quý thầy cô có thể xem đây như là tài liệu tham khảo thêm.

Chúng tôi mong đón nhận ý kiến xây dựng từ quý độc giả.

NHÓM BIÊN SOẠN

Chương 1 HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1. CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Các hàm số y = sinx và y = cosx :

a) Tập xác định

Tập xác định của hàm số y = sinx và y = cosx là D = R.

Hàm số y = sinx là hàm số lẻ.

Hàm số y = cosx là hàm số chẵn.

b) Tính chất tuần hoàn của các hàm số y = sinx và y = cosx

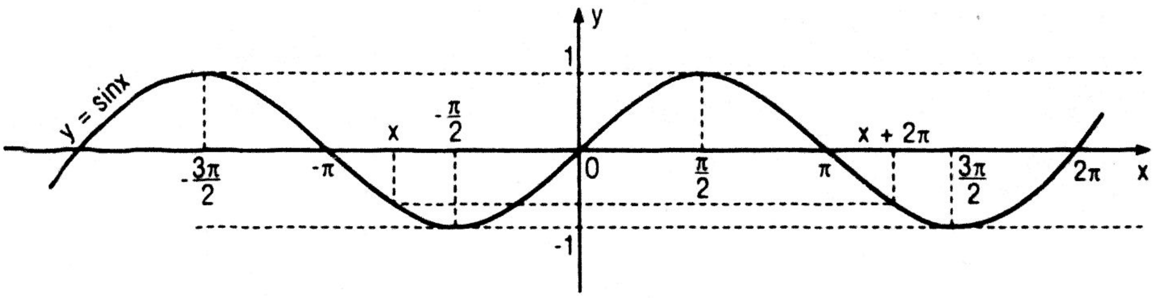
Hàm số y = sin x và y = cosx là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π.

c) Sự biến thiên và đồ thị của hàm số y = sinx

* *Bảng biến thiên của hàm số y = sinx trên đoạn [−π; π] như sau :*

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
y = sinx	0	↘	−1	↗	0	↗	1	↘	0

* *Đồ thị hàm số y = sinx*



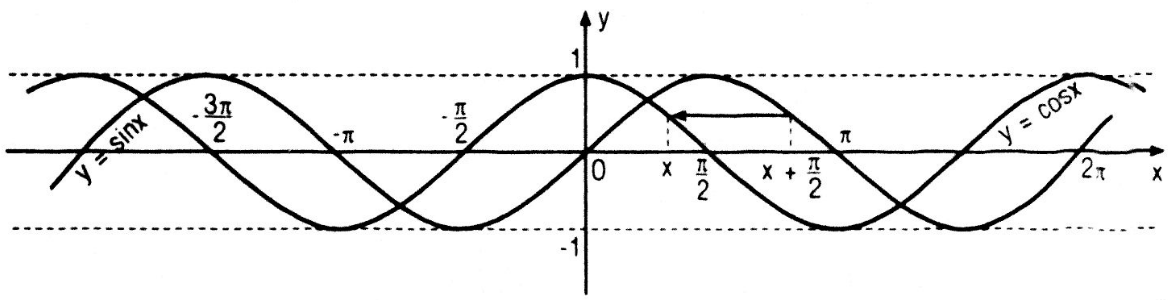
d) Sự biến thiên và đồ thị của hàm số y = cosx

* *Bảng biến thiên của hàm số y = cosx trên đoạn [$-\pi$; π]*

x	$-\pi$		0		π
y = cosx	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

* *Đồ thị hàm số y = cosx*

Ta có : cosx = sin$(x + \frac{\pi}{2})$ với mọi x, nên bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số y = sinx sang trái một đoạn có độ dài $\frac{\pi}{2}$, ta được đồ thị hàm số y = cosx (nó cũng được gọi là một đường hình sin).



*** *Chú ý :***

Hàm số y = sinx và y = cosx có tập xác định là R, tập giá trị là [-1 ; 1], là hàm số tuần hoàn có chu kì 2π và có đồ thị là một đường sin.

2. <u>Các hàm số y = tanx và y = cotx</u> :

a) Tập xác định

- *Hàm số y = tanx xác định với mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in Z$)*

  Hàm số y = tanx là một hàm số lẻ.

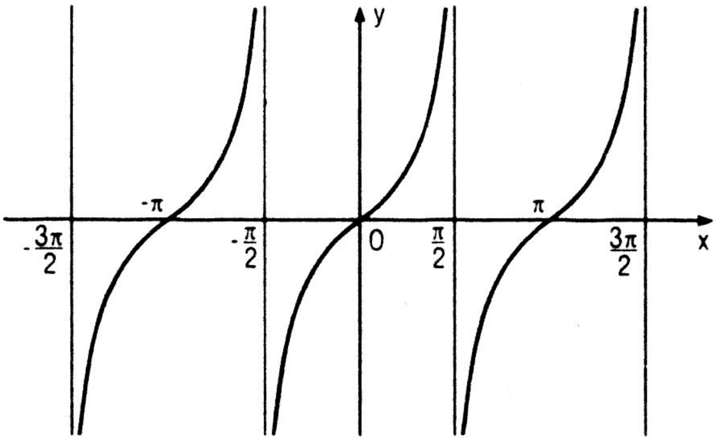
- *Hàm số y = cotx xác định với mọi $x \neq k\pi$ ($k \in Z$)*

  Hàm số y = cotx là một hàm số lẻ.

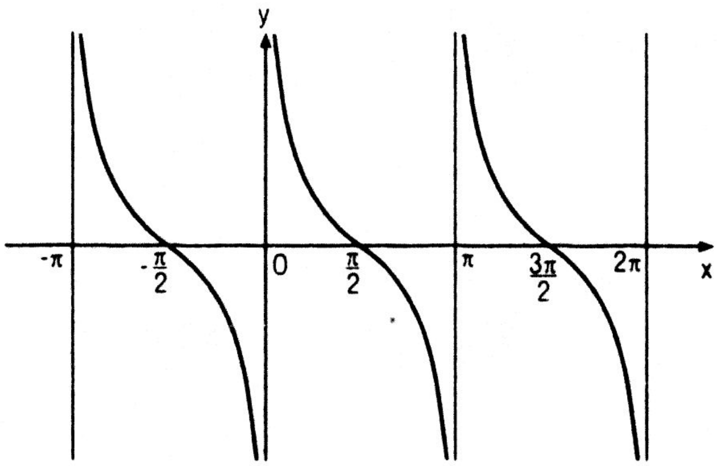
b) Tính chất tuần hoàn

Hàm số y = tanx và y = cotx là những hàm số tuần hoàn với chu kì π.

c) Đồ thị của hàm số y = tanx



d) Đồ thị của hàm số y = cotx



**** Chú ý :***

- *Hàm số y = tanx có tập xác định* $D_1 = R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in Z\}$;

  Hàm số y = cotx có tập xác định $D_2 = R \setminus \{k\pi \mid k \in Z\}$.
- *Hai hàm số y = tanx và y = cotx có tập giá trị là R, là hàm số lẻ và là các hàm tuần hoàn có chu kì π.*

3. <u>Về khái niệm hàm số tuần hoàn</u> :

Hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp $\mathcal{D}$ được gọi là hàm số tuần hoàn nếu có số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in \mathcal{D}$ ta có :

$$x + T \in \mathcal{D}\ ,\ x - T \in \mathcal{D}\ ,\ \text{và } f(x + T) = f(x)$$

Nếu có số T dương nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên thì hàn số đó được gọi là một hàm số tuần hoàn với chu kỳ T.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. *Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau :*

a) $y = \sqrt{3 - \sin x}$; *b)* $y = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$;

c) $y = \sqrt{\dfrac{1 - \sin x}{1 + \cos x}}$; *d)* $y = \tan(2x + \dfrac{\pi}{3})$.

Giải

a) Vì $-1 \le \sin x \le 1$ nên $3 - \sin x > 0$ với mọi x nên tập xác định của hàm số là R. D = R

b) $y = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$ xác định khi và chỉ khi $\sin x \ne 0$

$\Leftrightarrow x \ne k\pi, k \in Z$.

Vậy tập xác định $D = R \setminus \{k\pi / k \in Z\}$

c) Vì $1 - \sin x \ge 0$ và $1 + \cos x \ge 0$ nên hàm số xác định khi và chỉ khi $\cos x \ne -1 \Leftrightarrow x \ne \pi + k2\pi, k \in Z$

Vậy tập xác định $D = R \setminus \{\pi + k2\pi / k \in Z\}$

d) $y = \tan(2x + \dfrac{\pi}{3})$ xác định $\Leftrightarrow \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) \ne 0$

$\Leftrightarrow 2x + \dfrac{\pi}{3} \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \ne \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in Z$

Vậy tập xác định $D = R \setminus \{\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{2} / k \in Z\}$

2. ***Xét tính chẵn – lẻ của mỗi hàm số sau :***

a) $y = -2\sin x$; ***b)*** $y = 3\sin x - 2$;

c) $y = \sin x - \cos x$; ***d)*** $y = \sin x\cos^2 x + \tan x$

Giải

a) $f(x) = -2\sin x$

Tập xác định D = R, ta có $f(-x) = -2\sin(-x) = 2\sin x = -f(x)$, $\forall x \in R$

Vậy $y = -2\sin x$ là hàm số lẻ.

b) $f(x) = 3\sin x - 2$

Ta có : $f(\frac{\pi}{2}) = 1$; $f(-\frac{\pi}{2}) = -5$

$f(-\frac{\pi}{2}) \neq -f(\frac{\pi}{2})$ và $f(-\frac{\pi}{2}) \neq f(\frac{\pi}{2})$ nên hàm số $y = 3\sin x - 2$ không phải là hàm số chẵn cũng không phải là hàm số lẻ.

c) $f(x) = \sin x - \cos x$

Ta có $f(\frac{\pi}{4}) = 0$; $f(-\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}$

$f(-\frac{\pi}{4}) \neq -f(\frac{\pi}{4})$ và $f(-\frac{\pi}{4}) \neq f(\frac{\pi}{4})$ nên $y = \sin x - \cos x$ không phải là hàm số lẻ cũng không phải là hàm số chẵn.

d) $f(x) = \sin x\cos^2 x + \tan x$

Tập xác định $D = R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\} / k \in Z\}$

$\forall x \in D$ ta có $-x \in D$ và $f(-x) = \sin(-x)\cos^2(-x) + \tan(-x)$

$= -\sin x\cos^2 x - \tan x = -f(x)$

nên hàm số đã cho là hàm số lẻ.

3. *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mỗi hàm số sau :*

a) $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 3$; *b)* $y = \sqrt{1 - \sin(x^2)} - 1$; *c)* $y = 4\sin\sqrt{x}$

Giải

a) Ta có $-1 \leq \cos(x + \frac{\pi}{3}) \leq 1$

$\Rightarrow -2 \leq 2\cos(x + \frac{\pi}{3}) \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 2\cos(x + \frac{\pi}{3}) + 3 \leq 5 \Rightarrow 1 \leq y \leq 5$

Vậy min y = 1 khi $x + \frac{\pi}{3} = \pi + k2\pi$ tức $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$

max y = 5 khi $x + \frac{\pi}{3} = k2\pi$ tức $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in Z)$

b) Ta có $0 \leq 1 - \sin x^2 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq \sqrt{1 - \sin x^2} - 1 \leq \sqrt{2} - 1 \Rightarrow -1 \leq y \leq \sqrt{2} - 1$

Vậy min y = –1 khi $x^2 = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \geq 0$, $k \in Z$

max y = $\sqrt{2} - 1$ khi $x^2 = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k > 0$, $k \in Z$

c) Ta có $-1 \le \sin\sqrt{x} \le 1 \Rightarrow -4 \le 4\sin\sqrt{x} \le 4$

$\Rightarrow -4 \le y \le 4$

Vậy $\min y = -4$ khi $\sqrt{x} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k > 0,\ k \in Z$

$\max y = 4$ khi $\sqrt{x} = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \ge 0,\ k \in Z$

4. *Cho các hàm số $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \tan x$ và các khoảng*

$$J_1 = \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right); \quad J_2 = \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right); \quad J_3 = \left(\frac{31\pi}{4}; \frac{33\pi}{4}\right); \quad J_4 = \left(-\frac{452\pi}{3}; \frac{601\pi}{4}\right)$$

Hỏi hàm số nào trong ba hàm số đồng biến trên khoảng J_1? Trên khoảng J_2? Trên khoảng J_3? Trên khoảng J_4? (Trả lời bằng cách lập bảng).

Giải

Chú ý rằng $J_3 = \left(8\pi - \frac{\pi}{4}; 8\pi + \frac{\pi}{4}\right)$, $J_4 = \left(-150\pi - \frac{2\pi}{3}; -105\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

Ta có bảng sau, trong đó dấu "+" có nghĩa "đồng biến", dấu "0" có nghĩa "không đồng biến" :

Hàm số	J_1	J_2	J_3	J_4
$f(x) = \sin x$	0	+	+	0
$g(x) = \cos x$	+	0	0	+
$h(x) = \tan x$	+	+	+	0

5. *Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng? Khẳng định nào sai? Giải thích vì sao?*

a) Trên mỗi khoảng mà hàm số $y = \sin x$ đồng biến thì hàm số $y = \cos x$ nghịch biến.

b) Trên mỗi khoảng mà hàm số $y = \sin^2 x$ đồng biến thì hàm số $y = \cos^2 x$ nghịch biến.

Giải

a) Sai vì trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ hàm số $y = \sin x$ đồng biến nhưng hàm số $y = \cos x$ không nghịch biến.

b) Đúng do $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Giả sử $y = \sin^2 x$ đồng biến trên khoảng I, khi đó với $x_1, x_2 \in I$ và $x_1 < x_2$ thì $\sin^2 x_1 < \sin^2 x_2$

$\Rightarrow 1 - \sin^2 x_1 > 1 - \sin^2 x_2 \Rightarrow \cos^2 x_1 > \cos^2 x_2$

$\Rightarrow y = \cos^2 x$ nghịch biến trên I.